Test je wiskundige capaciteiten. Probeer één of meer van de onderstaande problemen op te lossen en stuur je zorgvuldige uitwerking naar wiskunde@transtrend.com. Onder de inzenders van goede en elegante oplossingen worden leuke wiskundige prijsjes verloot.
Bij elke opgave staat een niveau-indicatie. Niveau I duidt op een moeilijkheidsgraad vergelijkbaar met de eerste ronde NWO (Nederlandse Wiskunde Olympiade). Niveau II komt overeen met de tweede ronde NWO. Niveau III komt overeen met de nationale finale NWO. En niveau IV is vergelijkbaar met de IWO (Internationale Wiskunde Olympiade). Niveau X is een buitencategorie; niet vanwege de moeilijkheid, maar omdat de opgave nogal afwijkend is.
Kom je niet uit een opgave, laat dan zien hoe ver je bent gekomen. Dan sturen we je een tip hoe je verder zou kunnen gaan.
Vermeld bij alle correspondentie je naam, je leeftijd, je schooltype en in welke klas je zit.
Weet je zelf een mooie originele opgave, dan mag je die ook opsturen naar wiskunde@transtrend.com. Indien wij hem opnemen op deze site, ontvang je een presentje.

Succes.

Opgave 1 (niveau I)

Binnen een vierkant ABCD liggen vier punten E, F, G en H, zodanig dat ABE, BCF, CDG en DAH gelijkzijdige driehoeken zijn.
1a) Bewijs dat de driehoeken AFG, BGH, CHE en DEF ook gelijkzijdig zijn.
1b) Hoe verhoudt de lengte van de zijden van AFG zich tot de lengte van de zijden van ABE?

Opgave 2 (niveau II)

Een architect mag een eindeloos groot plein volledig betegelen. De tegels die hij ter beschikking heeft zijn allemaal regelmatige n-hoeken, met allemaal dezelfde lengte van de zijden. Bij het betegelen moeten de zijden van elkaar aangrenzende tegels volledig tegen elkaar gelegd worden. Dus zodanig dat elk paar aangrenzende tegels 2 hoekpunten gemeenschappelijk heeft. Voor n=4, dus voor vierkante tegels, resulteert dat in een ruitjespatroon.

2a) Indien de architect slechts 1 type tegel wil gebruiken, welke andere regelmatige n-hoeken dan het vierkant komen dan in aanmerking? Bewijs dat je opsomming volledig is?

2b) Het gebruik van slechts 1 type tegel vindt de architect natuurlijk te saai. Hij is niet voor niets architect. Hij wil 2 types tegel gebruiken: m-hoeken en n-hoeken, met m<n. Hij wil daarmee een eindeloze vlakvulling maken, waarbij de m-hoeken en de n-hoeken perfect gemengd worden. Daarmee bedoelt de architect dat in elk hoekpunt tenminste één m-hoek en tenminste één n-hoek samenkomen. Voor welke paren (m,n) is dit mogelijk? Bewijs wederom dat je opsomming volledig is. Geef voor elk paar aan hoe het aantal benodigde tegels van beide types zich tot elkaar kunnen verhouden bij een oneindig groot plein.

2c) De architect wil het nog mooier maken. Om internationaal aanzien te verwerven wil hij meer dan 2 verschillende type tegels gebruiken. Nog steeds uitsluitend regelmatige veelhoeken. En nog steeds moet in elk hoekpunt tenminste één exemplaar van elk type tegel samenkomen. Geef alle combinaties van regelmatige veelhoeken waarmee dit mogelijk is. Geef hierbij ook weer de verhouding van het aantal benodigde tegels van elk type.

Opgave 3 (niveau III)

Het Europese chartale stelsel bestaat uit muntjes van 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 en 200 cent. Deze regelmatige reeks wordt voortgezet door biljetten van 500, 1000, 2000, etc. Feitelijk stopt deze reeks bij 50.000 (dat is 500 euro), maar ten behoeve van deze opgave gaan we er vanuit dat de reeks zich oneindig voortzet.
We definiëren een betalingshandeling als het geven of terug ontvangen (wisselgeld) van één munt of biljet. De betaling van 4 cent vereist dus tenminste 2 betalingshandelingen: 2 + 2, of 5 - 1. De betaling van 17 euro vereist tenminste 3 betalingshandelingen: 1700 = 1000 + 500 + 200, of 2000 - 500 + 200, of 2000 - 200 - 100.
We definiëren b(n) als het kleinste bedrag waarvan de betaling tenminste n handelingen vereist. Dus b(1) = 1 en b(2) = 3.
Bepaal b(10). Schrijf b(n) als een algemene wiskundige functie en bewijs dat deze correct is voor alle $n \geq 0$.

Opgave 4 (niveau III)

Wiskundigen kliederen graag op roosterpapier. Het jullie wel bekende ruitjespapier bestaat uit allemaal vierkantjes. Minder bekend, maar in sommige boekhandels ook verkrijgbaar, is driehoekjespapier, bestaande uit allemaal gelijkzijdige driehoekjes. De hoekpunten van de vierkantjes respectievelijk driehoekjes op het roosterpapier noemen we roosterpunten.

4a) Bestaan er 3 roosterpunten op een eindig groot vel ruitjespapier die verbonden met elkaar een gelijkzijdige driehoek vormen? Bewijs dit.

4b) Bestaan er 4 roosterpunten op een eindig groot vel driehoekjespapier die verbonden met elkaar een vierkant vormen? Bewijs dit.

4c) Kun je bewijzen dat het antwoord op 4a en 4b hetzelfde is, zonder de vragen 4a en 4b afzonderlijk te beantwoorden?

Opgave 5 (niveau X)

Vier vuurvliegjes, Anneleen, Bart, Cecile en Douwe, vliegen in de lucht in een zodanige formatie dat zij de hoekpunten vormen van een tetraëder ABCD. Anneleen is tot over haar oren verliefd op Bart. Ze ziet maar één ding: Bart. En ze wil maar één ding: zo snel mogelijk naar Bart toe. Dus ze vliegt voortdurend recht op Bart af. Vliegt Bart naar rechts, dan stuurt Anneleen een beetje bij naar rechts. Vliegt Bart omhoog, dan stuurt Anneleen een beetje bij omhoog.

Ook Bart is verliefd. En was hij nou verliefd op Anneleen, dan vloog hij Anneleen tegemoet en kwamen ze elkaar tegen in het midden van het lijnstuk AB. Maar nee, Bart is verliefd op Cecile. Bart ziet maar één ding: Cecile. En Bart wil maar één ding: zo snel mogelijk naar Cecile toe. Dus Bart vliegt voortdurend recht op Cecile af. Vliegt Cecile een beetje naar rechts, dan stuurt Bart een beetje bij naar rechts. Vliegt Cecile een beetje omlaag, dan stuurt Bart een beetje bij omlaag.
Je raadt het al: ook Cecile is verliefd. En wel op Douwe. Ze vliegt voortdurend recht op Douwe af. En jawel, ook Douwe is verliefd: op Anneleen. Hij vliegt voortdurend recht op haar af.
Alle vier de vuurvliegjes zijn even verliefd, dus ze vliegen alle vier even hard. Op enig moment zullen ze elkaar in het middelpunt van de tetraëder treffen, alwaar een cumulatie van hartstocht en teleurstelling zal plaatsvinden. Zouden de vuurvliegjes slim zijn, dan vlogen ze recht op dit middelpunt af. Maar ze zijn verliefd, dus niet slim. Ze blijven recht op het middelpunt van hun begeerte afkoersen.
Hoe ver zal elk vuurvliegje vliegen alvorens hij of zij in het middelpunt komt? Je mag dit uitdrukken in de lengte van de zijde van het tetraëder.